PROOF.

$$\begin{aligned} a\left[f\times^{(C)}g\right]b &\Leftrightarrow\\ a\circ f^{-1}\not\asymp g^{-1}\circ b &\Leftrightarrow\\ (\operatorname{dom}a\times^{\mathsf{FCD}}\operatorname{im}a)\circ f^{-1}\not\asymp g^{-1}\circ(\operatorname{dom}b\times^{\mathsf{FCD}}\operatorname{im}b) &\Leftrightarrow\\ \langle f\rangle\operatorname{dom}a\times^{\mathsf{FCD}}\operatorname{im}a\not\asymp\operatorname{dom}b\times^{\mathsf{FCD}}\left\langle g^{-1}\right\rangle\operatorname{im}b &\Leftrightarrow\\ \langle f\rangle\operatorname{dom}a\not\asymp\operatorname{dom}b\wedge\operatorname{im}a\not\asymp\left\langle g^{-1}\right\rangle\operatorname{im}b &\Leftrightarrow\\ \operatorname{dom}a\,[f]\,\operatorname{dom}b\wedge\operatorname{im}a\,[g]\,\operatorname{im}b&. \end{aligned}$$

□

PROPOSITION 1414. $\mathcal{X}\left[\prod^{(A)}f\right]\mathcal{Y}\Leftrightarrow\forall i\in\operatorname{dom}f:\operatorname{Pr}_i^{\mathsf{RLD}}\mathcal{X}\,[f_i]\,\operatorname{Pr}_i^{\mathsf{RLD}}\mathcal{Y}$ for every indexed family f of funcoids and $\mathcal{X}\in\mathsf{RLD}(\operatorname{Src}\circ f)$, $\mathcal{Y}\in\mathsf{RLD}(\operatorname{Dst}\circ f)$.

PROOF.

$$\begin{aligned} \mathcal{X}\left[\prod^{(A)}f\right]\mathcal{Y} &\Leftrightarrow\\ \exists a\in\operatorname{atoms}\mathcal{X},b\in\operatorname{atoms}\mathcal{Y}:a\left[\prod^{(A)}f\right]b &\Leftrightarrow\\ \exists a\in\operatorname{atoms}\mathcal{X},b\in\operatorname{atoms}\mathcal{Y}\forall i\in\operatorname{dom}f:\operatorname*{Pr}_i^{\mathsf{RLD}}a\,[f_i]\,\operatorname*{Pr}_i^{\mathsf{RLD}}b &\Leftrightarrow\\ \forall i\in\operatorname{dom}f\exists x\in\operatorname{atoms}\operatorname*{Pr}_i^{\mathsf{RLD}}\mathcal{X},y\in\operatorname{atoms}\operatorname*{Pr}_i^{\mathsf{RLD}}\mathcal{Y}:x_i\,[f_i]\,y_i &\Leftrightarrow\\ \forall i\in\operatorname{dom}f:\operatorname*{Pr}_i^{\mathsf{RLD}}\mathcal{X}\,[f_i]\,\operatorname*{Pr}_i^{\mathsf{RLD}}\mathcal{Y}&. \end{aligned}$$

□

COROLLARY 1415. $\mathcal{X}\left[f\times^{(A)}g\right]\mathcal{Y}\Leftrightarrow\operatorname{dom}\mathcal{X}\,[f]\,\operatorname{dom}\mathcal{Y}\wedge\operatorname{im}\mathcal{X}\,[g]\,\operatorname{im}\mathcal{Y}$ for funcoids f, g and reloids $\mathcal{X}\in\mathsf{RLD}(\operatorname{Src}f;\operatorname{Src}g)$, and $\mathcal{Y}\in\mathsf{RLD}(\operatorname{Dst}f;\operatorname{Dst}g)$.

LEMMA 1416. For every $A\in\mathbf{Rel}(X;Y)$ (for every sets X, Y) we have:

$$\left\{\frac{(\operatorname{dom}a;\operatorname{im}a)}{a\in\operatorname{atoms}\uparrow^{\mathsf{FCD}}A}\right\}=\left\{\frac{(\operatorname{dom}a;\operatorname{im}a)}{a\in\operatorname{atoms}\uparrow^{\mathsf{RLD}}A}\right\}.$$

PROOF. Let $x\in\left\{\frac{(\operatorname{dom}a;\operatorname{im}a)}{a\in\operatorname{atoms}\uparrow^{\mathsf{RLD}}A}\right\}$. Then $x_0=\operatorname{dom}a$ and $x_1=\operatorname{im}a$ where $a\in\operatorname{atoms}\uparrow^{\mathsf{RLD}}A$.

Then $x_0=\operatorname{dom}(\mathsf{FCD})a$ and $x_1=\operatorname{im}(\mathsf{FCD})a$ and obviously $(\mathsf{FCD})a\in\operatorname{atoms}\uparrow^{\mathsf{FCD}}A$. So $x\in\left\{\frac{(\operatorname{dom}a;\operatorname{im}a)}{a\in\operatorname{atoms}\uparrow^{\mathsf{FCD}}A}\right\}$.

Let now $x\in\left\{\frac{(\operatorname{dom}a;\operatorname{im}a)}{a\in\operatorname{atoms}\uparrow^{\mathsf{FCD}}A}\right\}$. Then $x_0=\operatorname{dom}a$ and $x_1=\operatorname{im}a$ where $a\in\operatorname{atoms}\uparrow^{\mathsf{FCD}}A$.

$x_0\left[\uparrow^{\mathsf{FCD}}A\right]x_1\Leftrightarrow x_0\left[(\mathsf{FCD})\uparrow^{\mathsf{RLD}}A\right]x_1\Leftrightarrow x_0\times^{\mathsf{RLD}}x_1\not\asymp\uparrow^{\mathsf{RLD}}A$. Thus there exists atomic reloid x' such that $x'\in\operatorname{atoms}\uparrow^{\mathsf{RLD}}A$ and $\operatorname{dom}x'=x_0$, $\operatorname{im}x'=x_1$.

So $x\in\left\{\frac{(\operatorname{dom}a';\operatorname{im}a')}{a'\in\operatorname{atoms}\uparrow^{\mathsf{RLD}}A}\right\}$. □

THEOREM 1417. $\uparrow^{\mathsf{FCD}}A\left[f\times^{(C)}g\right]\uparrow^{\mathsf{FCD}}B\Leftrightarrow\uparrow^{\mathsf{RLD}}A\left[f\times^{(A)}g\right]\uparrow^{\mathsf{RLD}}B$ for funcoids f, g, and **Rld**-morphisms $A:\operatorname{Src}f\to\operatorname{Src}g$, and $B:\operatorname{Dst}f\to\operatorname{Dst}g$.